# BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

# SESSION 2022

## Épreuve de mathématiques

***GROUPEMENT B*** ***CODE : 22MATGRB2***

## Durée : 2 heures

| SPÉCIALITÉ | COEFFICIENT |
|---|---|
| Conception et industrialisation en microtechniques | 1,5 |
| Électrotechnique | 2 |

**L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.**
**L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège » est autorisé.**

**<u>Document-réponse à rendre avec la copie :</u>**
**Document-réponse ................................................................................ page 7/7**

**Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il soit complet.**
**Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1/7 à 7/7.**

## EXERCICE 1 (10 points)

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de $20 \text{ m.s}^{-1}$ sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage.

On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage.

On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant $t$.
$f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et $t$ est exprimé en seconde.

L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.

On suppose que $f$ est une fonction dérivable sur $[0\,;+\infty[$ et on note $f'$ sa fonction dérivée.

***Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante.***

### Partie A - Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction $f$ est solution de l'équation différentielle :

$$(E) : y' + 0{,}8\,y = 4 ,$$

où $y$ est une fonction inconnue de la variable réelle $t$, définie et dérivable sur $[0\,; +\infty[$, et où $y'$ est la fonction dérivée de $y$.

**1. a.** Résoudre l'équation différentielle $(E_0) : y' + 0{,}8y = 0$.

On fournit la formule suivante :

| Équation différentielle | Solutions sur un intervalle $I$ |
|---|---|
| $y' + ay = 0$ | $y(t) = k\mathrm{e}^{-at}$ |

**b.** Soit $g$ la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(t) = 5$.
Vérifier que la fonction $g$ est solution de l'équation différentielle $(E)$.

**c.** En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $(E)$.

**2.** On rappelle que $f(0) = 20$.
Déterminer la solution $f$ de l'équation $(E)$ qui vérifie la condition initiale $f(0) = 20$.

**Partie B - Étude de la fonction $f$ .**

On admet que la fonction $f$ est définie pour tout $t$ appartenant à $[\,0\,;\,+\infty\,[$ par :

$$f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0,8t} + 5\,.$$

Sa courbe représentative $C$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.


**1.a.** Démontrer que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$ .

**b.** En déduire que la courbe $C$ admet une asymptote dont on donnera une équation.

**2.** On admet que, pour tout réel $t$ appartenant à $[0\,;\,+\infty[$, on a :

$$f'(t) = -12\mathrm{e}^{-0,8t}\ .$$

Dresser le tableau de variation de $f$ sur $[\,0\,;\,+\infty[$.

**3.** Le système de freinage permet-il au chariot de s'arrêter ?

**4.** Soit $F$ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -18{,}75\,\mathrm{e}^{-0,8t} + 5t$ .

**a.** Vérifier que la fonction $F$ est une primitive de la fonction $f$ sur $[0\,;+\infty[$.

**b.** On admet que la distance $d$, exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants $t_0$ et $t_1$, est donnée par :

$$d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt\ .$$

Calculer la valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ . Donner une valeur arrondie au centimètre.

## Partie C - Étude locale.

On rappelle que l'on étudie la fonction $f$ définie sur $[0\,;+\infty[$ par :

$$f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0,8t} + 5\ .$$

On rappelle que sa courbe représentative $C$ est reproduite au début de la **partie B**.

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la fonction $f$ au voisinage de zéro.

| | |
|---|---|
| 1 | PolynômeTaylor(f(t), t, 0, 2)<br>$\rightarrow\ \mathbf{20 - 12\,t + \frac{24}{5}\,t^2}$ |

**1.** ***Cette question est une question à choix multiples. Une seule réponse est exacte. Recopier sur la copie la réponse qui vous parait exacte. On ne demande aucune justification.***
***Une réponse fausse, une réponse multiple ou une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.***

Le développement limité de la fonction $f$ à l'ordre 2 au voisinage de zéro est :

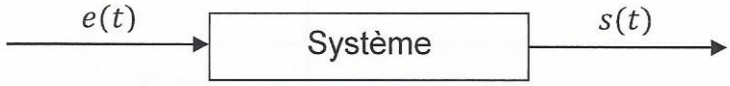
| | | |
|---|---|---|
| $20 - 12\,t + \dfrac{24}{5}\,t^2 + \epsilon(t)$<br>avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$ | $20 + \dfrac{24}{5}t^2$ | $20 - 12\,t + 4{,}8\,t^2 + t^2\epsilon(t)$<br>avec $\lim\limits_{t \to 0} \varepsilon(t) = 0$ |

**2.** Donner une équation de la tangente $T$ à la courbe $C$ au point d'abscisse $0$.

## EXERCICE 2 (10 points)

La fonction échelon unité $\mathcal{U}$ est définie par $\mathcal{U}(t) = 0 \; si \; t < 0$ et $\mathcal{U}(t) = 1 \; si \; t \geq 0$.

On considère le système électrique entrée-sortie schématisé ci-dessous.
On note $s(t)$ le signal de sortie associé au signal d'entrée $e(t)$.




Les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ sont des fonctions causales, c'est-à-dire qu'elles sont nulles pour $t < 0$.

On admet que les fonctions $e(t)$ et $s(t)$ admettent des transformées de Laplace notées respectivement $E(p)$ et $S(p)$ .

La fonction de transfert $H(p)$ du système est définie par $S(p) = H(p) \times E(p)$ .

On a $e(t) = 2\mathcal{U}(t) - \mathcal{U}(t-1)$ et $H(p) = \dfrac{1}{p+1}$ .

***On pourra utiliser le formulaire page suivante.***

**Partie A - signal d'entrée.**

**1.** Sur le **document-réponse à rendre avec la copie**, tracer la courbe représentative de la fonction $e(t)$.

**2.** Déterminer $E(p)$ .

**Partie B - signal de sortie.**

**1.** Démontrer que $$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \left(\frac{1}{p(p+1)}\right) e^{-p} .$$

**2.** Vérifier que $$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} .$$

**3.** Donner $\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p})$ , $\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p+1})$ , $\mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{p} \cdot e^{-p})$ et $\mathscr{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1} \cdot e^{-p}\right)$.

**4.** En déduire l'expression de $s(t)$ sur l'intervalle $[0\,;1[$.

**5.** On admet que sur $[1\,;+\infty[$ on a :

$$s(t) = (e-2)e^{-t} + 1 .$$

**a.** Calculer $s(1)$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.

**b.** Sur le **document-réponse à rendre avec la copie**, compléter la courbe représentative de la fonction $s$ .

**c.** Donner la limite de la fonction $s(t)$ en $+\infty$.

## FORMULAIRE POUR L'EXERCICE 2

| Transformation de Laplace | |
|---|---|
| **Fonction** | **Transformée de Laplace** |
| $t \longmapsto \mathcal{U}(t)$ | $p \longmapsto \dfrac{1}{p}$ |
| $t \longmapsto \mathcal{U}(t-a)$ | $p \longmapsto \dfrac{1}{p}\mathrm{e}^{-ap}$ |
| $t \longmapsto \mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec $a$ constante réelle | $p \longmapsto \dfrac{1}{p+a}$ |
| **Propriétés** | |
| **Fonction** | **Transformée de Laplace** |
| $t \longmapsto f(t)\mathcal{U}(t)$ | $p \longmapsto F(p)$ |
| $t \longmapsto f(t-a)\mathcal{U}(t-a)$, avec $a$ constante réelle | $p \longmapsto F(p)\mathrm{e}^{-ap}$ |
| $t \longmapsto f(t)\mathrm{e}^{-at}\mathcal{U}(t)$, avec $a$ constante réelle | $p \longmapsto F(p+a)$ |
| $t \longmapsto f'(t)\mathcal{U}(t)$ | $p \longmapsto pF(p) - f\left(0^{+}\right)$ |