Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

Correction détaillée – BTS Mathématiques – Session 2024

En-tête

- **Session :** 2024
- **Groupement :** B
- **Code sujet :** 24MATGRB3
- **Spécialité :** Électrotechnique
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou type collège)

EXERCICE 1 (10 points)

Énoncé résumé

On étudie la résistance du béton au cours de son séchage, modélisée par une fonction $f(t)$ solution d'une équation différentielle, puis on analyse cette fonction, calcule des valeurs numériques, étudie ses variations, sa limite, et on traite un algorithme lié au seuil de résistance.

Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. Résoudre sur [0 ; +∞ [l'équation différentielle homogène $y' + 0{,}06y = 0$

On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

La formule donnée est : pour $y' + a y = 0$, les solutions sont $y(t) = k e^{-a t}$, où k est une constante réelle.

Ici, $a = 0{,}06$. Donc :

$y(t) = k e^{-0{,}06 t}$, $k \in \mathbb{R}$

Point de méthode : On applique la formule standard pour une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins dans l'exposant ou mal recopier le coefficient.

2. Vérifier que la fonction constante $g(t) = 35$ **est solution de** $y' + 0{,}06y = 2{,}1$

Calculons $g'(t) = 0$ (car c'est une constante).

Remplaçons dans l'équation : $g'(t) + 0{,}06g(t) = 0 + 0{,}06 \times 35 = 2{,}1$

L'égalité est vérifiée.

$g(t) = 35$ est bien solution de l'équation différentielle $y' + 0{,}06y = 2{,}1$.

Point de méthode : Pour vérifier qu'une fonction est solution, il suffit de remplacer dans l'équation.
Erreur fréquente : Oublier de calculer la dérivée de la fonction test.

3. Déduire l'ensemble des solutions de $y' + 0{,}06y = 2{,}1$

L'équation étant linéaire non homogène, toute solution est la somme d'une solution particulière et de la solution générale de l’homogène.

On a déjà trouvé :

- Solution particulière : $g(t) = 35$
- Solution homogène : $k e^{-0,06 t}$

L’ensemble des solutions est : $y(t) = k e^{-0,06 t} + 35$, $k \in \mathbb{R}$

Point de méthode : Solution générale = solution particulière + solution homogène.
Erreur fréquente : Oublier la constante k ou la solution particulière.

4. À l’instant $t = 0$, la résistance du béton est nulle. En déduire l’expression de f.

On cherche la solution qui vérifie $f(0) = 0$:

$f(0) = k e^{-0,06 \times 0} + 35 = k \times 1 + 35 = k + 35$

On veut $f(0) = 0$ donc $k = -35$.

$f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

Point de méthode : Utiliser la condition initiale pour déterminer la constante.
Erreur fréquente : Oublier de remplacer $t = 0$ dans l’expression.

Partie B – Étude de la fonction $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

1. Calculer la résistance du béton après 7 jours et après 72 heures (3 jours)

On utilise la fonction $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$.

- Pour $t = 7$:
  $f(7) = -35 e^{-0,06 \times 7} + 35$
  $0,06 \times 7 = 0,42$
  $e^{-0,42} \approx 0,657$
  $-35 \times 0,657 \approx -22,0$
  $f(7) \approx -22,0 + 35 = 13,0$ (arrondi au dixième)
- Pour $t = 3$:
  $f(3) = -35 e^{-0,06 \times 3} + 35 = -35 e^{-0,18} + 35$
  $e^{-0,18} \approx 0,837$
  $-35 \times 0,837 \approx -29,3$
  $f(3) \approx -29,3 + 35 = 5,7$ (arrondi au dixième)

Après 7 jours : **13,0 MPa**
Après 72 h (3 jours) : **5,7 MPa**

Point de méthode : Remplacer la valeur de t dans la formule, bien arrondir.
Erreur fréquente : Oublier de convertir 72 h en jours ou erreur de calcul sur l’exponentielle.

2. Vérifier que $f'(t) = 2,1 e^{-0,06 t}$

Calculons la dérivée :

$f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

Dérivée de $-35 e^{-0,06 t}$: $-35 \times (-0,06) e^{-0,06 t} = 2,1 e^{-0,06 t}$

Dérivée de 35 : 0

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 2,1 e^{-0,06 t}$

Point de méthode : Dérivée de $e^{a t}$ est $a e^{a t}$.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins dans la dérivée.

3. Déterminer le signe de f'(t) et le sens de variation de f

$f'(t) = 2,1 e^{-0,06 t}$; or $e^{-0,06 t} > 0$ pour tout t.

Donc $f'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Point de méthode : Un coefficient positif devant une exponentielle négative reste positif.
Erreur fréquente : Croire que l'exponentielle négative peut devenir négative.

4. Limite de f(t) quand $t \to +\infty$ et interprétation

$f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,06 t} \to 0$

Donc $f(t) \to 35$

Interprétation : la résistance du béton tend vers 35 MPa au bout d'un temps très long, c'est la résistance maximale atteignable.

$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 35$
Interprétation : la résistance finale du béton est de 35 MPa.

Point de méthode : Limite d'une exponentielle négative à l'infini est 0.
Erreur fréquente : Oublier le terme constant ou faire une erreur de signe.

5. Le fabricant affirme que la résistance après 28 jours correspond à 80% de la résistance finale. Est-ce vrai ?

Calculons f(28) :

$f(28) = -35 e^{-0,06 \times 28} + 35 = -35 e^{-1,68} + 35$

$e^{-1,68} \approx 0,186$

$-35 \times 0,186 \approx -6,5$

$f(28) \approx -6,5 + 35 = 28,5$

80% de la résistance finale : $0,8 \times 35 = 28$

28,5 est légèrement supérieur à 28, donc l'affirmation est **presque exacte** (légèrement supérieure à 80%).

Après 28 jours, la résistance est **28,5 MPa**, soit **81,4%** de la résistance finale ($28,5/35 \times 100 \approx 81,4\%$).

L'affirmation du fabricant est donc légèrement sous-estimée.

Point de méthode : Calculer la valeur puis le pourcentage.
Erreur fréquente : Prendre 28 jours comme la résistance finale au lieu de calculer le pourcentage.

6. Montrer que $F(t) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 t} + 35 t$ **est une primitive de** f

On doit vérifier que $F'(t) = f(t)$.

- Dérivée de $\frac{1750}{3} e^{-0,06 t}$: $\frac{1750}{3} \times (-0,06) e^{-0,06 t} = -35 e^{-0,06 t}$
- Dérivée de $35 t$: 35

Donc $F'(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35 = f(t)$.

F est bien une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$.

Point de méthode : Dériver chaque terme séparément.
Erreur fréquente : Oublier le coefficient lors de la dérivation de l'exponentielle.

7. Calculer la valeur moyenne de la résistance sur [0 ; 28]

Formule : $M = \frac{1}{28} \int_{0}^{28} f(t) dt = \frac{1}{28} [F(28) - F(0)]$

- $F(28) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 \times 28} + 35 \times 28$
- $e^{-1,68} \approx 0,186$
- $\frac{1750}{3} \times 0,186 \approx 108,3$
- $35 \times 28 = 980$
- $F(28) \approx 108,3 + 980 = 1088,3$
- $F(0) = \frac{1750}{3} \times 1 + 0 = 583,3$
- $F(28) - F(0) \approx 1088,3 - 583,3 = 505,0$
- $M = \frac{505,0}{28} \approx 18,0$ (arrondi au dixième)

La valeur moyenne de la résistance sur les 28 premiers jours est **18,0 MPa**.

Point de méthode : Utiliser la primitive et la formule de la valeur moyenne.
Erreur fréquente : Oublier de soustraire F(0) ou mal calculer l'exponentielle.

Partie C – Algorithme

1. Compléter l'algorithme

On veut le nombre minimal de jours pour que $R \geq 21$.

- Ligne 3 : Tant que $R < 21$
- Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$

Ligne 3 : Tant que $R < 21$
Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$

Point de méthode : On incrémente t jusqu'à atteindre le seuil.
Erreur fréquente : Mettre $t < 21$ au lieu de $R < 21$.

2. Donner la valeur de N

On cherche le plus petit t tel que $f(t) \geq 21$.

$f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35 \geq 21$

$-35 e^{-0,06 t} \geq -14 \Rightarrow e^{-0,06 t} \leq 14/35 = 0,4$

$-0,06 t \leq \ln(0,4) \Rightarrow t \geq -\ln(0,4)/0,06$

$\ln(0,4) \approx -0,916 \Rightarrow t \geq 15,3$

Donc N = 16 (on prend le premier entier supérieur).

La valeur de N est **16** jours.

Point de méthode : Résoudre l'inéquation, puis arrondir à l'entier supérieur.
Erreur fréquente : Arrondir à l'entier inférieur ou mal manipuler les logarithmes.

EXERCICE 2 (10 points)

Énoncé résumé

On étudie une tension d'entrée périodique, on calcule sa pulsation, sa valeur moyenne, sa valeur efficace, ses coefficients de Fourier, et on analyse l'approximation par une série de Fourier tronquée.

1. Vérifier que $\omega = \pi / 10$

Formule : $\omega = 2\pi / T$ avec $T = 20$.

$\omega = 2\pi / 20 = \pi / 10$

$\omega = \pi / 10$

Point de méthode : Utiliser la définition de la pulsation.
Erreur fréquente : Oublier le facteur 2 dans 2π.

2. Représentation graphique

Sur [0;10[, E(t) = 12 ; sur [10;20[, E(t) = 0. Le signal est périodique de période 20.

- Tracer un rectangle de hauteur 12 de t = 0 à t = 10, puis 0 de t = 10 à t = 20. Répéter ce motif sur [-30;30].

Le graphe est un signal créneau de période 20, alternant 12 (pendant 10 unités) et 0 (pendant 10 unités).

Point de méthode : Bien respecter l'échelle et la périodicité.
Erreur fréquente : Oublier la répétition du motif ou mal placer les sauts.

3. Déterminer la valeur moyenne a_0 de E

Formule : $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt$

Sur [0;10], $E(t) = 12$; sur [10;20], $E(t) = 0$.

$a_0 = \frac{1}{20} \left(\int_0^{10} 12 dt + \int_{10}^{20} 0 dt \right) = \frac{1}{20} (12 \times 10 + 0) = \frac{120}{20} = 6$

La valeur moyenne a_0 est **6**.

Point de méthode : Intégrer par morceaux sur chaque intervalle.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par la période.

4. Montrer que $E_{eff} = 6 \sqrt{2}$

Formule : $E_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (E(t))^2 dt$

Sur [0;10], $E(t) = 12$ donc $E(t)^2 = 144$.

$E_{eff}^2 = \frac{1}{20} (\int_0^{10} 144 dt) = \frac{1}{20} (144 \times 10) = \frac{1440}{20} = 72$

$E_{eff} = \sqrt{72} = 6 \sqrt{2}$

$E_{eff} = 6 \sqrt{2}$

Point de méthode : Remplacer $E(t)$ par sa valeur sur chaque intervalle.
Erreur fréquente : Prendre la racine trop tôt ou oublier la période.

5. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$

Formule : $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T E(t) \cos(n \omega t) dt$

Sur [0;10], $E(t) = 12$, sur [10;20], $E(t) = 0$.

$a_n = \frac{2}{20} \int_0^{10} 12 \cos(n \omega t) dt = \frac{12}{10} \int_0^{10} \cos(n \omega t) dt$

Intégrale de $\cos(n \omega t)$ de 0 à 10 : $\int_0^{10} \cos(n \omega t) dt = \left[\frac{1}{n \omega} \sin(n \omega t) \right]_0^{10} = \frac{1}{n\omega} (\sin(n\omega \times 10) - \sin(0))$

Mais $\omega = \pi/10$, donc $n\omega \times 10 = n\pi$, donc $\sin(n\pi) = 0$.

Donc l'intégrale vaut 0, donc $a_n = 0$.

Pour tout $n \geq 1$, $a_n = 0$

Point de méthode : Utiliser la périodicité des fonctions trigonométriques.
Erreur fréquente : Oublier que $\sin(n\pi) = 0$.

6. Montrer que pour n pair, $b_n = 0$

On admet $b_n = \frac{12}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))$

Si n pair, $n = 2p$, donc $\cos(n\pi) = \cos(2p\pi) = 1$

Donc $b_n = \frac{12}{n\pi} (1 - 1) = 0$

Pour n pair, $b_n = 0$

Point de méthode : Utiliser la parité de $\cos(n\pi)$.
Erreur fréquente : Confondre la valeur de $\cos(n\pi)$ pour n pair et impair.

7. Compléter le tableau (arrondis à 0,01)

On a déjà $a_n = 0$ pour tout n.

Pour b_n :

- Pour n impair, $\cos(n\pi) = -1$, donc $b_n = \frac{12}{n\pi} (1 - (-1)) = \frac{24}{n\pi}$
- Pour n pair, $b_n = 0$

Calculs :

- n=1 : $b_1 = 24 / (\pi) \approx 7,64$
- n=2 : $b_2 = 0$
- n=3 : $b_3 = 24 / (3\pi) \approx 2,55$
- n=4 : $b_4 = 0$
- n=5 : $b_5 = 24 / (5\pi) \approx 1,53$
- n=6 : $b_6 = 0$
- n=7 : $b_7 = 24 / (7\pi) \approx 1,09$

n	1	2	3	4	5	6	7
a_n	0	0	0	0	0	0	0
b_n	7,64	0	2,55	0	1,53	0	1,09

Point de méthode : Remplacer n dans la formule, bien arrondir.
Erreur fréquente : Oublier que $b_n = 0$ pour n pair.

8. Commenter l'affirmation : « E_7 représente une approximation de E_{eff} avec moins de 5 % d'erreur »

On a $E_{eff}^2 = (a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2)$

Ici, $E_7^2 = (a_0)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{7} (a_k^2 + b_k^2)$

Les coefficients b_n décroissent rapidement, donc la somme tronquée à 7 termes donne une bonne approximation.

Calculons E_7 (valeurs déjà arrondies) :

- $a_0 = 6$
- $b_1 = 7,64$, $b_3 = 2,55$, $b_5 = 1,53$, $b_7 = 1,09$
- Donc $E_7^2 = 36 + \frac{1}{2}(7,64^2 + 2,55^2 + 1,53^2 + 1,09^2)$
- $7,64^2 = 58,37$
- $2,55^2 = 6,50$
- $1,53^2 = 2,34$
- $1,09^2 = 1,19$
- Somme = 58,37 + 6,50 + 2,34 + 1,19 = 68,40
- $E_7^2 = 36 + 0,5 \times 68,40 = 36 + 34,20 = 70,20$

- $E_7 = \sqrt{70,20} \approx 8,39$
- $E_{eff} = 6\sqrt{2} \approx 8,49$
- Erreur relative : $\frac{8,49 - 8,39}{8,49} \approx 1,2\%$

Donc l'erreur est bien inférieure à 5%.

L'affirmation est **justifiée** : E_7 approche E_{eff} avec une erreur d'environ 1,2%.

Point de méthode : Calculer l'erreur relative pour comparer.
Erreur fréquente : Oublier le facteur 1/2 dans la somme.

Formulaire récapitulatif

- $y' + a y = 0 \implies y(t) = k e^{-a t}$
- Solution générale d'une équation différentielle linéaire non homogène : $y(t) = y_p(t) + y_h(t)$
- Valeur moyenne sur $[a; b]$: $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$
- Primitive : dérivée de $A e^{a t}$ est $A a e^{a t}$
- Pulsation : $\omega = 2\pi / T$
- Série de Fourier : $a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t)\, dt$, $a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t)\, dt$, $b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t)\, dt$
- Valeur efficace : $f_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T (f(t))^2\, dt$

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de maths en BTS

- **Lisez attentivement l'énoncé** : repérez les données, les unités, et les questions indépendantes.
- **Justifiez chaque étape** : expliquez vos calculs, citez les formules ou propriétés utilisées.
- **Vérifiez la cohérence des résultats** : une valeur négative pour une résistance, par exemple, doit vous alerter.
- **Soignez la rédaction** : structurez vos réponses, encadrez les résultats finaux, et écrivez lisiblement.
- **Gérez votre temps** : ne bloquez pas trop longtemps sur une question, passez à la suivante si besoin.

© FormaV EI. Tous droits réservés.

Propriété exclusive de FormaV. Toute reproduction ou diffusion interdite sans autorisation.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.
Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d’accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d’auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l’intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.