Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS SCBH

Mathématiques

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Étude du départ d'un train à propulsion électromagnétique et calcul d'une aire (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 6**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2018/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Étude du départ d'un train à propulsion électromagnétique et calcul d'une aire

Le sujet étudie le déplacement d'un wagon de train à très haute vitesse, modélisé par une fonction donnant la distance parcourue en fonction du temps. Il mobilise une équation différentielle, l'étude de la vitesse et des variations, puis le calcul intégral pour déterminer l'aire d'une pièce destinée à une gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0.

On reconnaît une équation différentielle homogène de la forme fournie dans le sujet. Ici, le coefficient de *y* est ,2, donc les solutions sont les exponentielles de taux 0,2 multipliées par une constante réelle arbitraire. Aucune condition initiale n'étant imposée, la constante reste libre.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

On dérive la fonction proposée : $g'(t) = -15$. En la substituant dans le membre de gauche de l'équation, on obtient $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$. Ce résultat est bien le second membre, donc la fonction proposée vérifie l'équation différentielle sur l'intervalle demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> g est une solution de l'équation différentielle sur $[0, 3]$.

Question 3°. Déduire de la résolution de l'équation homogène et de la solution particulière g l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

La solution générale de l'équation avec second membre s'obtient en ajoutant à une solution particulière toutes les solutions de l'équation homogène. D'après les deux questions précédentes, la solution particulière est $g(t) = -15t - 75$, et les solutions homogènes sont $Ce^{0,2t}$. On additionne ces deux expressions, avec C réel arbitraire.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{0,2t} - 15t - 75$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Déterminer la fonction f, solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t, qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

La solution générale est $y(t) = Ce^{0,2t} - 15t - 75$. La condition initiale donne $f(0) = C - 75 = 0$, donc $C = 75$. En reportant cette valeur, on obtient la fonction recherchée. Elle vérifie bien l'équation différentielle et vaut zéro à l'instant du départ.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir de l'expression admise de f'(t), résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

D'après l'expression admise, $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Comme l'exponentielle est croissante, $f'(t) \geq 0$ équivaut à $e^{0,2t} \geq 1$, donc à $t \geq 0$. Sur l'intervalle étudié, cette inégalité est vérifiée partout, avec égalité seulement à l'origine.

Intervalle ou valeur	$t = 0$	$0 < t \leq 3$
$f'(t)$	0	positive

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, 3]$.

Question 1° b). Déduire du signe de f'(t) les variations de la fonction f sur [0, 3].

La dérivée est nulle en $t = 0$ et strictement positive sur $]0, 3]$. Ainsi, f est strictement croissante sur $[0, 3]$. Elle part de $f(0) = 0$ et atteint à l'extrémité $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$, soit environ 16,659 km.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f est strictement croissante de 0 à environ 16,659 km sur $[0, 3]$.

Question 2°. Déterminer le nombre de kilomètres parcourus par le wagon au bout d'une minute et arrondir le résultat au dixième.

Après une minute, la distance parcourue est $f(1)$. En utilisant l'expression de la fonction, $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15 \approx 1,6052$ km. L'arrondi au dixième s'effectue donc à partir du chiffre des centièmes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Distance parcourue après une minute : 1,6 km.

Question 3° a). Sachant que la vitesse instantanée du wagon en kilomètres par minute est f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir le résultat au dixième.

La vitesse instantanée en kilomètres par minute est $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. À deux minutes, $f'(2) = 15e^{0,4} - 15 \approx 7,3774$ km/min. On arrondit cette valeur au dixième, comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> À 2 minutes, la vitesse est de 7,4 km/min.

Question 3° b). Indiquer si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse en tenant compte de la vitesse à t = 2 minutes et de l'objectif de 400 km/h à atteindre en moins de 2 minutes.

À deux minutes, la vitesse vaut environ $7,377 \times 60 = 442,6$ km/h, donc elle dépasse 400 km/h. De plus, la vitesse est continue et vaut 0 au départ. Elle prend donc la valeur 400 km/h à un instant strictement compris entre 0 et 2 minutes : l'objectif est atteint avant l'échéance.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, 400 km/h est atteint avant 2 minutes.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Parmi les propositions, la tangente au point d'abscisse 2 est la troisième. Elle correspond à l'écriture de la tangente $y = f'(2)(t-2) + f(2)$, après remplacement par les expressions de $f(2)$ et de $f'(2)$. Aucune justification n'étant demandée dans l'énoncé, il suffit de recopier cette équation.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75.$

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir, parmi les trois valeurs proposées, l'aire A1 du rectangle OPQR en unité d'aire, en s'appuyant sur le schéma et ses repères.

Sur le schéma, le rectangle $OPQR$ s'étend de $x = 0$ à $x = 3$, et de $y = 0$ à $y = 2,25$. Son aire est donc le produit de sa largeur par sa hauteur. Parmi les valeurs proposées, on retient celle obtenue par ce calcul.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie pour g(x) = 27x/(2x² + 18), calculer l'aire A2 de la partie limitée par la courbe de g, l'axe des abscisses et les droites x = 0 et x = 3.

La primitive fournie est $G(x) = \frac{27}{4}\ln(x^2+9) + c_1$. Comme $g(x)$ est positive sur $[0,3]$, l'aire demandée est $G(3) - G(0)$. La constante s'élimine et $\ln(18) - \ln(9) = \ln(2)$, d'où l'expression exacte et sa valeur approchée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire totale A de la pièce hachurée, en unité d'aire, puis arrondir le résultat au millième.

Par symétrie, l'aire totale est le double de l'aire d'une moitié. Cette moitié est le rectangle d'aire A_1, auquel on retire l'aire sous la courbe, A_2. Ainsi, $A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right)$. On arrondit au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a.

2. Probabilités et test d'hypothèse sur l'obsolescence programmée des smartphones

L'exercice porte sur deux formes d'obsolescence observées dans une population de smartphones, puis sur la réparabilité d'un lot de modèles A et une enquête concernant la marque B. Il évalue les probabilités conditionnelles, la loi binomiale, l'espérance et la mise en œuvre d'un test bilatéral.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données concernant 200 smartphones, l'obsolescence technique, l'obsolescence logicielle et leur recoupement, compléter le tableau d'effectifs croisant les deux types d'obsolescence.

Sur 200 appareils, les effectifs touchés sont 6 pour l'obsolescence technique et 16 pour l'obsolescence logicielle. Parmi les 16 appareils touchés par l'obsolescence logicielle, 12,5 % sont aussi touchés techniquement, soit 2 smartphones. Les trois autres cases se déduisent des totaux de lignes et de colonnes.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	170	184
Total	16	184	200

Les marges retrouvent bien les proportions de l'énoncé et le total de 200 smartphones.

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	170	184
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 170. Totaux : 6, 16, 184 et 200 smartphones.

Question 2°. Pour T : « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence technique » et L : « le smartphone prélevé est touché par l'obsolescence logicielle », donner P(T), P(L) et P_L(T), la probabilité de T sachant L.

Une probabilité correspond à la proportion de smartphones concernés dans la population. Les 3 % touchés techniquement donnent directement la probabilité de T, et les 8 % touchés par l'obsolescence logicielle donnent celle de L. Enfin, l'énoncé précise que parmi les smartphones L, 12,5 % sont également T : c'est précisément la probabilité conditionnelle demandée.

On obtient donc $P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = P(T \mid L) = 0{,}125$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). Calculer la probabilité P(T ∩ L) qu'un smartphone soit touché simultanément par l'obsolescence technique et l'obsolescence logicielle.

Pour obtenir la probabilité que les deux événements se réalisent, on utilise la probabilité conditionnelle donnée dans l'énoncé. Parmi les smartphones touchés par L, la proportion touchée aussi par T est 0,125. La proportion de smartphones L est 0,08 ; le produit de ces deux valeurs fournit l'intersection dans la population entière.

$$P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}01.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cap L) = 0{,}01$.

Question 3° b). Calculer la probabilité P(T ∪ L) qu'un smartphone soit touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence.

Être touché par au moins l'un des deux types d'obsolescence signifie appartenir à l'union des événements T et L. Additionner leurs probabilités compte deux fois les smartphones présents dans les deux groupes ; il faut donc retrancher la probabilité de l'intersection calculée à la question précédente.

- $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L)$.
- $P(T \cup L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(T \cup L) = 0{,}10$, soit 10 % des smartphones.

Question 3° c). Calculer P_T(L), la probabilité qu'un smartphone soit touché par l'obsolescence logicielle sachant qu'il est touché par l'obsolescence technique.

La probabilité demandée porte sur les smartphones déjà touchés techniquement : on rapporte donc l'effectif, ou la probabilité, de l'intersection à celle de T. L'intersection vaut 0,01 et la probabilité de T vaut 0,03. Le quotient donne la proportion de smartphones T qui sont aussi touchés par l'obsolescence logicielle.

$$P_T(L) = \frac{P(T \cap L)}{P(T)} = \frac{0{,}01}{0{,}03} = \frac{1}{3} \approx 0{,}333.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_T(L) = \frac{1}{3} \approx 0{,}333$, soit environ 33,3 %.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables parmi 50 smartphones prélevés, suit une loi binomiale, puis déterminer ses paramètres.

Chaque smartphone prélevé constitue une épreuve de Bernoulli : le « succès » est ici un appareil non réparable, de probabilité $0{,}045$. Le stock étant suffisamment important, le prélèvement est assimilé à des tirages avec remise. Les 50 épreuves sont donc indépendantes et ont la même probabilité de succès. La variable X compte le nombre de succès parmi ces 50 épreuves.

Elle suit la loi binomiale $\mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$: paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$.

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous les smartphones soient réparables.

Un lot entièrement réparable ne contient aucun smartphone non réparable : cela correspond à l'événement $X = 0$. Pour un prélèvement, la probabilité d'obtenir un appareil réparable est le complément de 0,045, soit 0,955. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, la probabilité que les 50 appareils soient réparables est le produit de 50 probabilités identiques.

$P(X = 0) = 0{,}955^{50} \approx 0{,}100$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est $0{,}100$ au millième.

Question 3° a). Exécuter à la main l'algorithme fourni, puis compléter le tableau des valeurs de P(X = i) et de la somme S pour i allant de 0 à 3.

À chaque étape, l'algorithme ajoute à S la probabilité correspondant à la valeur courante de i. Les probabilités binomiales sont calculées avec $n = 50$ et $p = 0{,}045$, puis les sommes sont cumulées. Le tableau ci-dessous donne les valeurs arrondies au millième ; les additions sont faites avec les valeurs non arrondies.

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

La dernière case de la ligne S est la somme atteinte à la fin de la boucle.

Tableau de l'algorithme complété

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(X = i)$: 0,100 ; 0,236 ; 0,272 ; 0,205. Sommes successives : 0,100 ; 0,336 ; 0,608 ; 0,813.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

Après la boucle, S contient les probabilités des cas $X = 0$, $X = 1$, $X = 2$ et $X = 3$. L'algorithme additionne donc les probabilités de ces quatre événements incompatibles. Leur somme est la probabilité qu'un lot contienne au plus trois smartphones non réparables.

$S = P(X \leq 3) \approx 0{,}813$, soit environ 81,3 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$S \approx 0{,}813$: environ 81,3 % des lots contiennent au plus 3 appareils non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de X et interpréter le résultat dans le contexte d'un lot de 50 smartphones.

Pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance est le produit np. Ici, chaque lot comporte 50 smartphones et la probabilité qu'un appareil soit non réparable est 0,045. On calcule donc $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. Cette espérance décrit une moyenne sur un grand nombre de lots, et non un nombre obligatoire dans chaque lot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(X) = 2{,}25$ smartphones non réparables en moyenne par lot de 50.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, F suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. Choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95.

Sous H_0, la fréquence suit une loi normale de moyenne 0,55 et d'écart type 0,037. L'intervalle central contenant 95 % des valeurs est centré sur la moyenne et correspond à environ 1,96 écart type de part et d'autre. On obtient $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$, puis on arrondit au centième comme demandé.

Parmi les choix proposés, la valeur correcte est 0,07.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $h \approx 0{,}07$.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %, pour H0 : p = 0,55 et H1 : p ≠ 0,55.

Le test est bilatéral et son seuil est de 5 %. La zone de non-rejet est l'intervalle central de probabilité 0,95, centré sur la valeur supposée sous H_0, soit 0,55. Avec la valeur de h arrondie à 0,07 retenue dans la question précédente, les bornes sont 0,55 − 0,07 et 0,55 + 0,07.

1. Si la fréquence observée appartient à $[0{,}48\,;\,0{,}62]$, on ne rejette pas H_0.
2. Sinon, on rejette H_0 au profit de H_1.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si $F \in [0{,}48\,;\,0{,}62]$; rejeter H_0 sinon.

Question 3°. Sur l'échantillon de 180 personnes, 76 déclarent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Donner la conclusion du test.

La fréquence observée dans l'échantillon est le quotient du nombre de réponses positives par l'effectif interrogé : $76/180 \approx 0{,}422$. Cette fréquence est inférieure à la borne basse 0,48 de la zone de non-rejet. Elle appartient donc à la région critique du test bilatéral, et les données conduisent à rejeter l'hypothèse selon laquelle la proportion vaut 0,55.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $76/180 \approx 0{,}422 < 0{,}48$: on rejette H_0 au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Session 2018 du BTS Mathématiques, Groupement B, code MATGRB1, durée 2 heures, coefficient variable selon la spécialité. Le sujet étudie le départ d'un train à propulsion électromagnétique et l'obsolescence programmée des smartphones. Il évalue équations différentielles, fonctions, vitesse, intégrales, probabilités conditionnelles, loi binomiale, espérance et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' - 0,2y = 0, les solutions sont y(t) = ke^(0,2t) ; on ajoute une solution particulière pour résoudre l'équation avec second membre.
- La dérivée de la distance par rapport au temps donne la vitesse ; convertir les unités avant de la comparer à un objectif.
- Pour une loi binomiale B(n,p), P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^(n-k) et E(X) = np.
- Dans un test bilatéral, comparer la fréquence observée à l'intervalle d'acceptation construit sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour une équation différentielle, vérifier la solution particulière par substitution avant de construire la solution générale.
- Distinguer la vitesse en km/min de l'objectif en km/h et effectuer la conversion avant toute conclusion.
- En probabilité conditionnelle, identifier clairement l'événement conditionnant et vérifier les marges du tableau d'effectifs.
- Pour le test d'hypothèse, calculer la fréquence observée et appliquer la règle de décision au seuil de 5 %.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment obtenir la solution générale d'une équation différentielle avec second membre ?

Résolvez d'abord l'équation homogène associée. Ajoutez ensuite à ses solutions une solution particulière de l'équation complète, puis utilisez la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment calculer une probabilité conditionnelle à partir du tableau d'effectifs ?

La probabilité de A sachant B est le quotient de l'effectif de A ∩ B par l'effectif de B. Le dénominateur correspond donc à la population pour laquelle la condition B est réalisée.

Q : Comment déterminer et interpréter la somme finale de l'algorithme binomial ?

L'algorithme additionne P(X = i) pour i de 0 à 3. Sa valeur finale représente la probabilité d'obtenir au plus trois smartphones non réparables dans le lot.

Q : Que faut-il comparer pour conclure le test d'hypothèse bilatéral ?

Calculez la fréquence observée dans l'échantillon, puis comparez-la aux bornes de l'intervalle d'acceptation construit sous H0 au seuil de 5 %. Concluez au rejet ou au non-rejet de H0.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2018/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Systèmes Constructifs Bois et Habitat : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.