Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS SCBH

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf pour la spécialité Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Contrôle de conformité et durée de vie de tubes fluorescents (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2022/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ est ralenti par un système de freinage, et sa vitesse est modélisée en fonction du temps. L'étude mobilise une équation différentielle, les variations et la limite d'une fonction, le calcul d'une distance par intégration, un développement limité et l'équation d'une tangente.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E₀) : y' + 0,8y = 0.

La formule donnée pour une équation homogène de la forme $y' + ay = 0$ donne les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, $a = 0,8$. Cette famille est définie sur l'intervalle demandé et comprend toutes les solutions, y compris la fonction nulle lorsque $k = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Soit g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5. Vérifier que g est une solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$. En substituant dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette valeur est égale au membre de droite, pour tout $t \in [0; +[$. La fonction g vérifie donc bien l'équation différentielle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution de (E), car $g'(t) + 0,8g(t) = 4$.

Question 1. c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. La solution générale de l'équation homogène associée est $y_h(t) = ke^{-0,8t}$.
2. La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E).
3. Les solutions de l'équation complète s'obtiennent en ajoutant cette solution particulière aux solutions de l'équation homogène. La constante k varie dans $\mathbb{R}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale de (E) est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. La condition initiale impose $f(0) = 5 + k = 20$, puisque $e^0 = 1$. On trouve donc $k = 15$. En remplaçant cette constante dans la solution générale, on obtient l'unique fonction qui vérifie à la fois l'équation différentielle et la vitesse initiale du chariot.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5, pour f(t) = 15e$^{-0,8t}$ + 5.

Lorsque $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $15e^{-0,8t} \to 0$. Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le terme exponentiel tend vers zéro et le terme constant reste inchangé. La limite de $f(t)$ est donc égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. Par le critère d'asymptote horizontale, la courbe représentative C se rapproche donc d'une droite horizontale d'ordonnée 5 lorsque t augmente sans borne. Une droite horizontale d'ordonnée constante c a pour équation $y = c$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale de C : $y = 5$.

Question 2. En utilisant l'expression admise f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. Elle vaut 20 en $t = 0$, puis tend vers 5 quand $t \to +\infty$. Le tableau résume ces variations sur tout l'intervalle demandé.

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Le chariot s'arrêterait si sa vitesse devenait nulle. Or, pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle $e^{-0,8t}$ est strictement positive. Ainsi, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$ à tout instant : la vitesse ne s'annule jamais. Elle diminue et se rapproche de $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ sans atteindre cette valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse reste supérieure à $5\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

Question 4. a. Vérifier que F(t) = −18,75e$^{-0,8t}$ + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivée de l'exponentielle composée, le premier terme a pour dérivée $(-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$. Le second terme a pour dérivée 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$ pour tout $t \geq 0$, ce qui établit que F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. Sachant que la distance parcourue entre t_0 et t_1 est donnée par l'intégrale de f entre ces instants, calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner sa valeur arrondie au centimètre.

Par le théorème fondamental de l'intégration, la distance entre 0 et 1 vaut $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$. Cette expression est la valeur exacte en mètres. Son approximation est ensuite arrondie au centimètre, soit à deux décimales en mètres.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$, soit $1\,533\ \mathrm{cm}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les trois propositions de développement limité à l'ordre 2 au voisinage de zéro, choisir l'unique réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

Le développement limité de l'exponentielle donne $e^{-0,8t} = 1 - 0,8t + \frac{0,8^2}{2}t^2 + o(t^2)$. En multipliant par 15, puis en ajoutant 5, on obtient la partie régulière $20 - 12t + 4,8t^2$. La proposition correcte est celle qui ajoute à cette partie un reste de la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 s'écrit $y = f(0) + f'(0)(t - 0)$. D'après l'expression de f, $f(0) = 15 + 5 = 20$. La dérivée admise donne $f'(0) = -12e^0 = -12$. En substituant ces deux valeurs dans la formule de la tangente, on obtient son équation dans le repère de la courbe.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 20 - 12t$.

2. Contrôle de conformité et durée de vie de tubes fluorescents

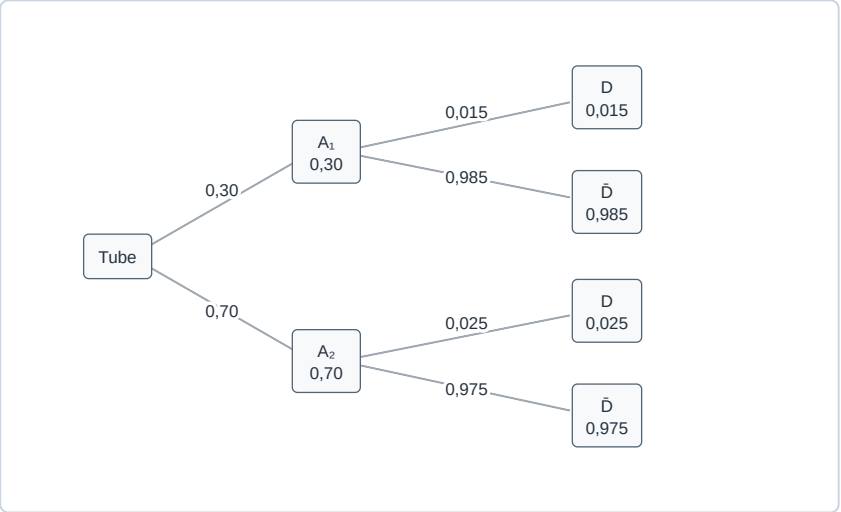
Une usine produit des tubes fluorescents dans deux ateliers dont les parts de production et les taux de défaut diffèrent; l'exercice étudie les probabilités liées à l'origine et à la conformité des tubes. Il porte aussi sur la durée de fonctionnement modélisée par une loi exponentielle et sur l'estimation, à partir d'un échantillon de 1 000 rivets, de la proportion de rivets conformes.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant l'origine des tubes selon l'atelier, puis la présence ou l'absence d'un défaut, à partir des données de production.

On sépare d'abord les tubes selon leur atelier d'origine. Depuis chaque atelier, on distingue ensuite les tubes défectueux des tubes sans défaut. Les probabilités au premier niveau sont les parts de production. Au second niveau, on utilise les taux de défaut de chaque atelier et leurs complémentaires : 1,5 % et 98,5 % pour l'atelier 1, 2,5 % et 97,5 % pour l'atelier 2.

Arbre pondéré des tubes



A_1 : atelier 1 ; A_2 : atelier 2 ; D : défaut.

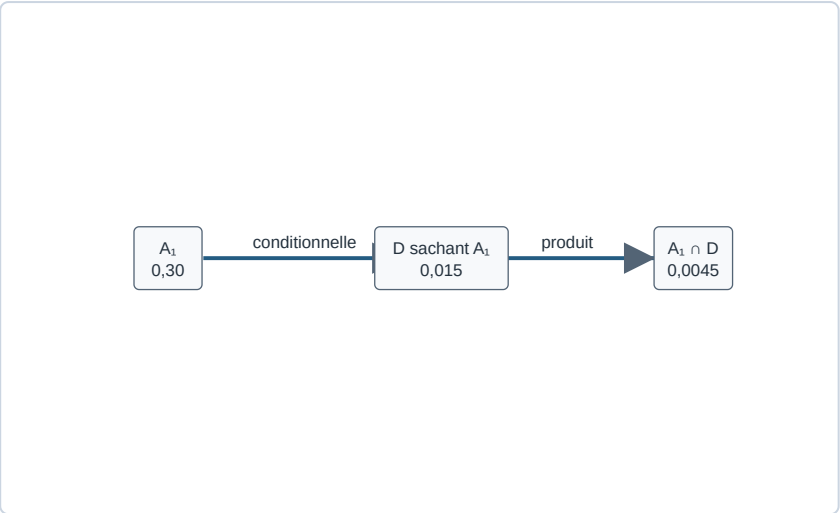
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Arbre pondéré : A_1 : 0,30 ; A_2 : 0,70 ; $P(D|A_1) = 0{,}015$; $P(\bar{D}|A_1) = 0{,}985$; $P(D|A_2) = 0{,}025$; $P(\bar{D}|A_2) = 0{,}975$.

Question 2. Calculer la probabilité $P(A_1 \cap D)$, où A_1 désigne l'événement « le tube provient de l'atelier 1 » et D l'événement « le tube présente un défaut ».

Pour obtenir la probabilité conjointe que le tube provienne de l'atelier 1 et soit défectueux, on multiplie la part de production de cet atelier par son taux de défaut. Ainsi, avec $P(A_1) = 0{,}30$ et $P(D|A_1) = 0{,}015$, on a $P(A_1 \cap D) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$.

Probabilité du défaut dans l'atelier 1



La probabilité conjointe vaut 0,30 × 0,015.

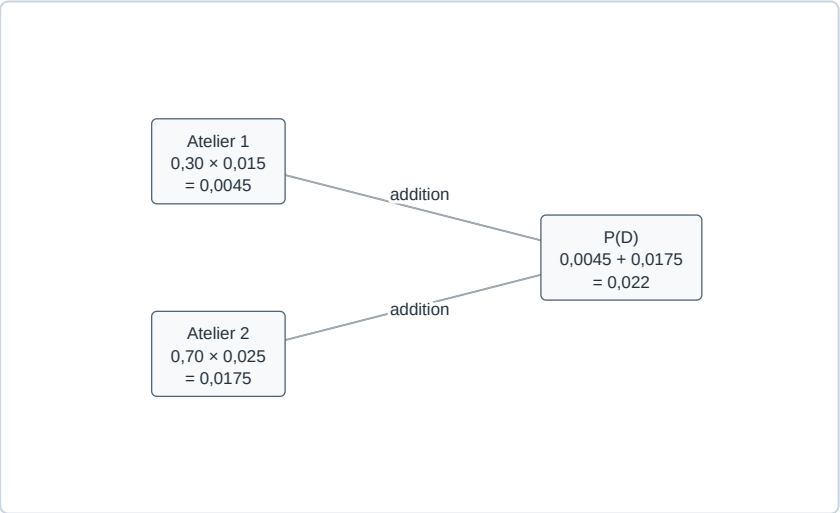
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 % de la production totale.

Question 3. Montrer, en utilisant les données de l'énoncé, que la probabilité qu'un tube pris au hasard présente un défaut est égale à 0,022.

Un tube défectueux provient nécessairement de l'un des deux ateliers. On additionne donc les probabilités des deux chemins qui aboutissent à D : $P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D)$. Les contributions sont 0,30 × 0,015 = 0,0045 et 0,70 × 0,025 = 0,0175. Leur somme est 0,022.

Addition des deux chemins menant à un défaut



Les deux chemins correspondent aux deux ateliers.

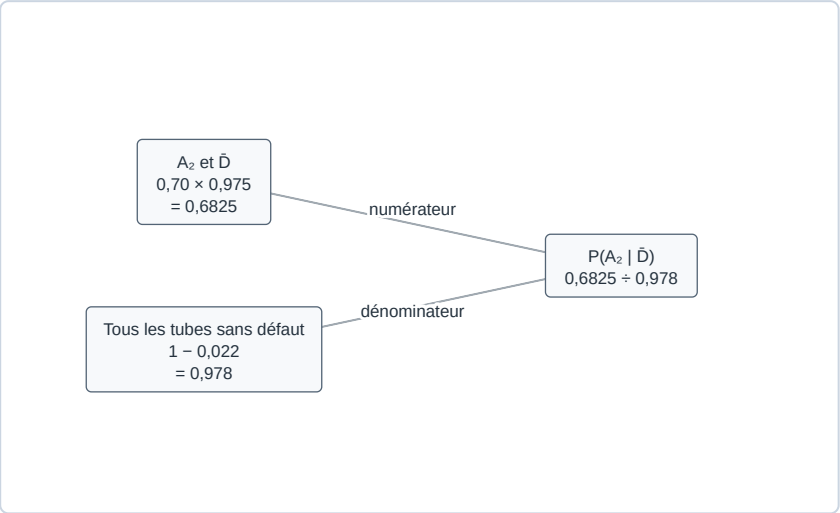
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(D) = 0{,}022$, soit 2,2 % des tubes.

Question 4. Sachant que le tube choisi ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.

On cherche $P(A_2|\bar{D})$. La probabilité d'obtenir un tube de l'atelier 2 sans défaut est $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$. La probabilité totale d'un tube sans défaut vaut $1 - 0{,}022 = 0{,}978$. En divisant la probabilité conjointe par cette probabilité totale, on obtient $P(A_2|\bar{D}) = 0{,}6825 \div 0{,}978 \approx 0{,}698$.

Origine atelier 2 parmi les tubes sans défaut



La probabilité conditionnelle est le rapport de la probabilité conjointe à $P(\bar{D})$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(A_2|\bar{D}) \approx 0{,}698$, soit environ 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. La durée de bon fonctionnement T, en heures, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0001$. Déterminer son espérance E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, l'espérance est donnée par $E(T) = 1/\lambda$. L'énoncé précise $\lambda = 0{,}0001$, donc $E(T) = 1/0{,}0001 = 10\,000$ heures. Dans le contexte, cette valeur représente la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes fluorescents.



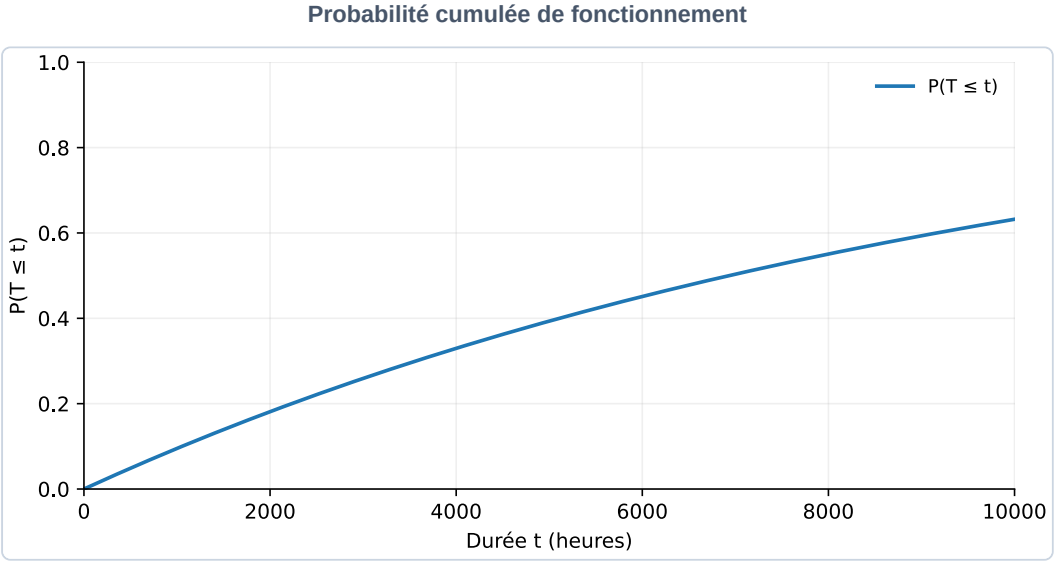
L'espérance est exprimée en heures.

✓ RÉPONSE À RETENIR

E(T) = 10 000 heures.

Question 2. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.

La formule fournie donne $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $\lambda = 0{,}0001$ et $t = 8\,000$, on obtient $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0,8} \approx 0{,}5507$. La loi exponentielle étant continue, remplacer ≤ par < ne change pas la probabilité. L'arrondi au centième est 0,55.



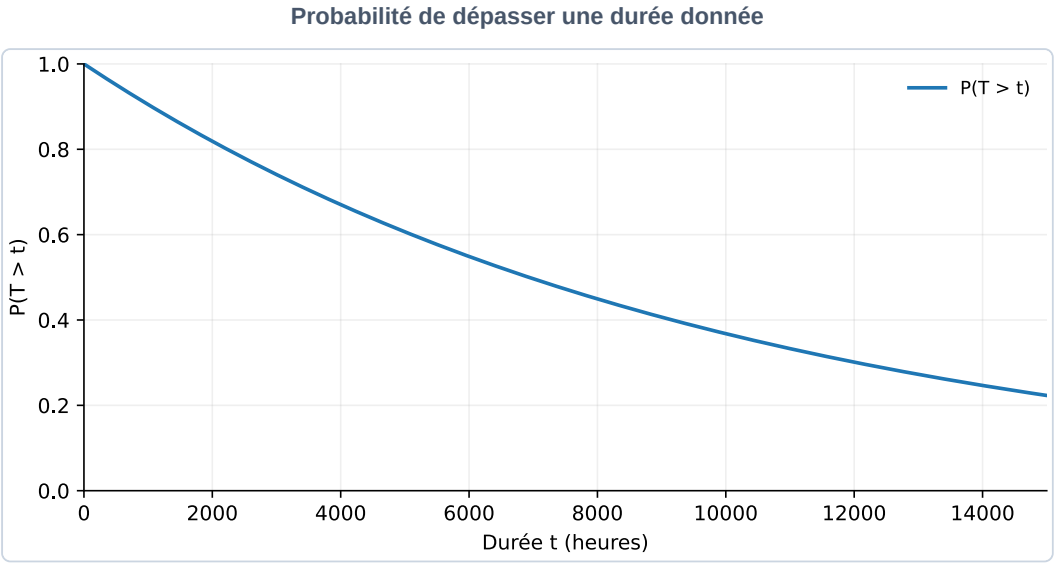
À 8 000 heures, la probabilité cumulée vaut environ 0,551.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(T < 8 000) ≈ 0,55 au centième près.

Question 3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser t heures est le complément de la probabilité cumulée : $P(T > t) = e^{-\lambda t}$. Pour $\lambda = 0{,}0001$ et $t = 10\,000$, $P(T > 10\,000) = e^{-1} \approx 0{,}3679$. Arrondie au centième, cette probabilité vaut 0,37.



À 10 000 heures, la probabilité de survie vaut environ 0,368.

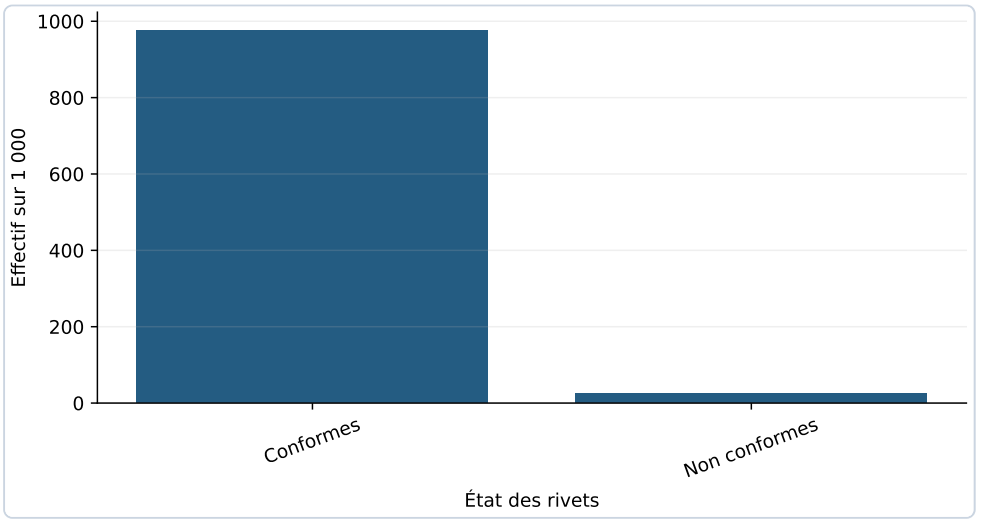
✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$ au centième près.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Sur les 1 000 rivets de l'échantillon, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle de la proportion inconnue p de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

L'estimation ponctuelle de la proportion p est la fréquence observée dans l'échantillon. Parmi les 1 000 rivets prélevés, 975 sont conformes, donc $f = 975/1\,000 = 0{,}975$. Cette fréquence est l'estimation ponctuelle de la proportion de rivets conformes dans l'ensemble de la production.

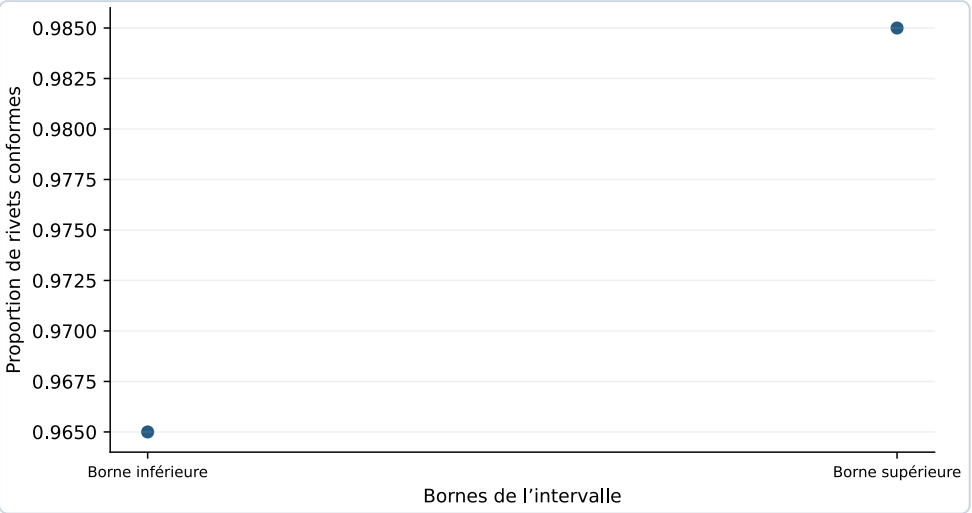


✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $\hat{p} = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance de niveau 95 % de la proportion p, centré sur la fréquence observée, et arrondir les bornes à 10^{-3} près.

La fréquence observée est f = 0,975 et l'effectif est n = 1 000. On applique la formule de l'énoncé : $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1-f)/n}$. La marge vaut environ 0,009677. Les bornes non arrondies sont 0,965323 et 0,984677 ; leur arrondi au millième donne l'intervalle demandé.



✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : [0,965 ; 0,985].

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, dure 2 heures; son coefficient est 2, sauf en Traitement des matériaux où il est 3. Deux exercices portent sur le freinage d'un chariot et la production de tubes fluorescents. Ils évaluent équations différentielles, analyse de fonctions, intégration, probabilités conditionnelles, loi exponentielle et estimation par intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = b$, une solution particulière constante vaut b/a si $a \neq 0$; la solution générale s'obtient en ajoutant les solutions de l'équation homogène.
- Pour $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, la limite en $+\infty$ vaut 5 et la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = 5$.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, $E(T) = 1/\lambda$, $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$ et $P(T > t) = e^{-\lambda t}$.
- L'intervalle de confiance fourni à 95 % est centré sur f et utilise les bornes $f \pm 1,96\sqrt{(f(1 - f)/n)}$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, vérifier si sa vitesse atteint zéro, et non seulement si elle décroît.
- Pour calculer une distance, utiliser $F(t_1) - F(t_0)$, respecter les bornes et donner l'unité ainsi que l'arrondi demandé.
- Dans l'arbre, distinguer les proportions de production des probabilités conditionnelles de défaut de chaque atelier.
- Pour l'intervalle de confiance, utiliser $f = 975/1\,000$ et arrondir séparément les deux bornes au millième.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue entre deux instants avec la fonction vitesse ?

La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Si F est une primitive de f, calculez $F(t_1) - F(t_0)$, puis exprimez le résultat en mètres et appliquez l'arrondi demandé.

Q : Comment calculer les probabilités de durée de fonctionnement avec une loi exponentielle ?

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la probabilité de fonctionner au plus t heures vaut $1 - e^{-\lambda t}$. La probabilité de dépasser t heures vaut $e^{-\lambda t}$. Ici, $\lambda = 0,0001$ et le temps est exprimé en heures.

Q : L'épreuve prévoit-elle un temps différent pour chaque exercice ?

Le sujet fixe une durée totale de 2 heures pour les deux exercices et ne prescrit pas de temps séparé. Répartissez le temps entre les parties, puis gardez quelques minutes pour contrôler les calculs, les unités et les arrondis.

Q : Quelle formule et quel arrondi faut-il appliquer à l'intervalle de confiance ?

Utilisez la fréquence observée $f = 975/1\,000$ et la formule fournie, $f \pm 1,96\sqrt{(f(1 - f)/n)}$, avec $n = 1\,000$. Le sujet demande d'arrondir chacune des deux bornes à 10^{-3} près.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2022/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Systèmes Constructifs Bois et Habitat : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.