Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS SCBH

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. **Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage** (12 questions) — **Page 3**

2. **Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique** (9 questions) — **Page 7**

3. **Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ)** (Synthèse & Q&A Examen) — **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2022/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot pendant son freinage

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m·s⁻¹, ralentit sous l'action d'un système de freinage. L'étude porte sur l'équation différentielle de sa vitesse, ses variations et sa limite, la distance parcourue, puis le développement limité et la tangente à sa courbe.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0.

L'équation homogène est de la forme $y' + ay = 0$, dont les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$. Ici, $a = 0,8$. La constante réelle k est arbitraire, puisqu'aucune condition initiale n'est imposée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Vérifier que la fonction constante g définie par g(t) = 5 est une solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

1. La fonction constante $g(t) = 5$ a pour dérivée $g'(t) = 0$.
2. En substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$, égal au membre de droite pour tout t.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est bien une solution de $y' + 0,8y = 4$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toute solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, soit $ke^{-0,8t}$. Ainsi, on obtient toutes les solutions sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution de l'équation différentielle vérifiant la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. À $t = 0$, la condition initiale impose $5 + k = 20$, car $e^0 = 1$. On trouve donc $k = 15$, puis on remplace cette constante dans la solution générale.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, pour $t \geq 0$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, le terme $15e^{-0,8t}$ tend vers zéro et la limite de la somme est égale à 5.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

1. La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5.
2. La courbe représentative admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$, d'ordonnée égale à cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = −12e$^{-0,8t}$, dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle est strictement positive, donc $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante. De plus, $f(0) = 20$ et $f(t) \to 5$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	−	
Variation de f	20	↘ 5

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Pour tout temps fini, le terme exponentiel est strictement positif. La vitesse reste donc supérieure à 5 et ne peut jamais atteindre zéro dans ce modèle.

- La vitesse diminue.
- Elle tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$, sans s'annuler.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non, le chariot ne s'arrête pas : sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Vérifier que F(t) = −18,75e^{−0,8t} + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5$. Le coefficient du terme exponentiel vaut 15. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$: F est une primitive de f.

Question 4.b. Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre les instants $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

Par le théorème fondamental, $d = F(1) - F(0)$. En utilisant la primitive donnée, cela donne $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. Cette valeur exacte est environ $15,3251$ mètres, soit $15,33$ mètres au centimètre près.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m}$, soit $15,33\ \mathrm{m}$ au centimètre près.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

> Le développement limité affiché donne les termes $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. La proposition correcte est celle où le reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. On a $f(0) = 20$ et, d'après la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La droite passe donc par $(0; 20)$ et a pour pente -12.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$y = 20 - 12t.$

2. Transformées de Laplace et réponse d'un système électrique

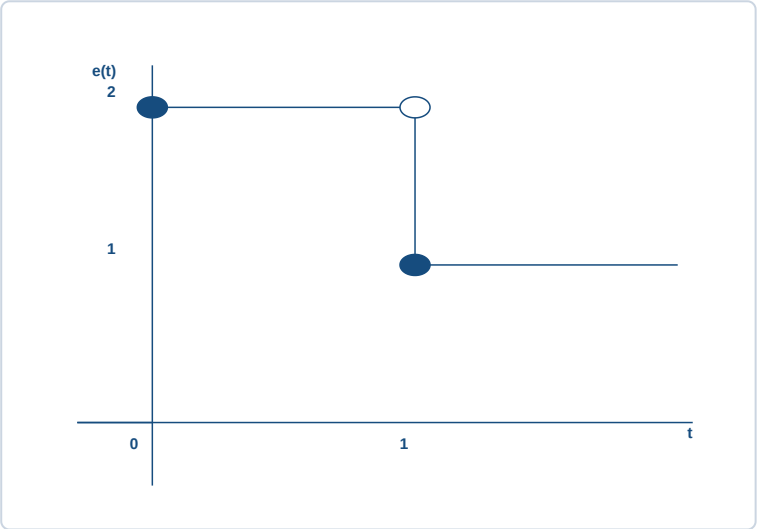
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) − U(t − 1) et possède la fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). Il faut représenter le signal d'entrée, déterminer la sortie à l'aide des transformées de Laplace, puis étudier son expression, une valeur particulière et sa limite.

Partie A - Signal d'entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

Pour lire le signal, on applique la définition de l'échelon unité aux deux termes. Avant zéro, les deux échelons sont nuls. Entre zéro et un, seul U(t) vaut 1. À partir de t=1, les deux échelons valent 1, y compris en t=1 puisque U(0)=1. La courbe comporte donc un palier à 2, puis un palier à 1, avec les points ouverts et fermés indiqués sur le schéma.

Signal d'entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t)=0 pour t<0 ; e(t)=2 pour 0≤t<1 ; e(t)=1 pour t≥1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d'entrée e(t).

Par linéarité, la transformée de 2U(t) est 2/p. Le formulaire donne la transformée de U(t-a) : e^{-ap}/p. Avec a=1, la transformée du second terme est donc e^{-p}/p. On soustrait cette transformée à celle du premier terme, conformément à e(t)=2U(t)-U(t-1). Cette expression vaut pour p où les transformées sont définies.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e⁻ᵖ.

La fonction de transfert vérifie S(p)=H(p)E(p). On remplace H(p) par 1/(p+1) et E(p) par (2-e^{-p})/p, déterminée à la question précédente. En mettant le produit sur le dénominateur p(p+1), puis en séparant les deux termes du numérateur, on obtient directement l'expression demandée. Le facteur e^{-p} reste associé au second terme.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on met les deux fractions de droite au même dénominateur. Le numérateur obtenu est (p+1)-p, qui se simplifie en 1. Le dénominateur commun est p(p+1), ce qui redonne exactement le membre de gauche. Cette décomposition en éléments simples sera utile pour appliquer les transformées de Laplace inverses à la question suivante.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e⁻ᵖ/p et de e⁻ᵖ/(p + 1).

Les deux premières transformées inverses se lisent dans le formulaire : l'échelon correspond à 1/p, et l'exponentielle décroissante à 1/(p+1). Pour les deux expressions contenant e^{-p}, on applique le décalage temporel d'une unité : on remplace t par t-1 et on multiplie par U(t-1). Les quatre résultats, dans l'ordre des expressions demandées, sont :

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

On décompose 1/[p(p+1)] en 1/p-1/(p+1). La partie non décalée de S(p), multipliée par 2, a donc pour transformée inverse 2(1-e^{-t}) pour t≥0. Le second terme de S(p) contient e^{-p} : sa transformée inverse est retardée d'une unité et multipliée par U(t-1). Or U(t-1)=0 sur l'intervalle demandé.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(t) = 2(1 - e^{-t})$ pour $0 \leq t < 1$.

Question 5.a. **Sachant que s(t) = (e − 2)e^{-t} + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1), donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

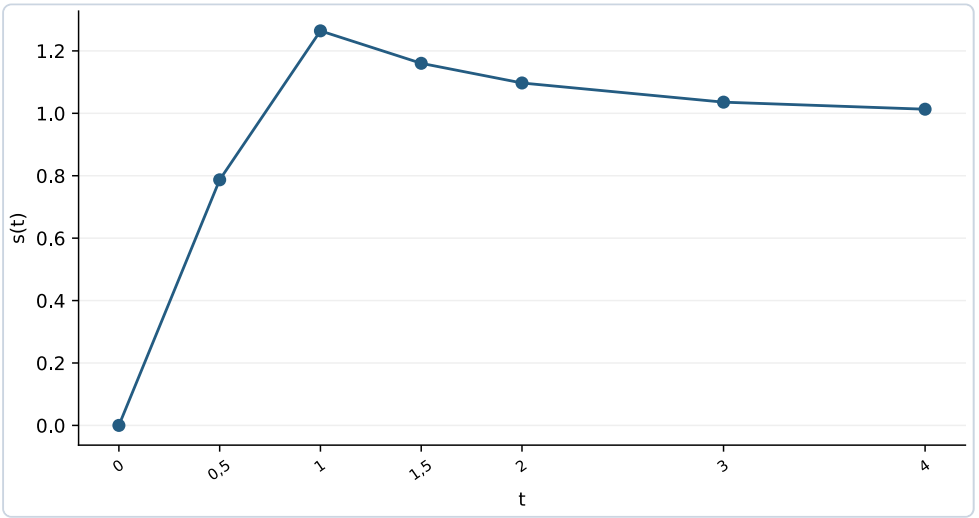
La formule donnée s'applique dès t=1, donc on la substitue en t=1 : s(1)=(e-2)e^{-1}+1. En simplifiant, (e-2)/e+1=2-2/e. Cette valeur exacte est environ 1,26424. Arrondie au dixième, elle vaut 1,3. Elle correspond au point de raccordement des deux expressions du signal de sortie.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1,3.$

Question 5.b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur [0;1[, on reprend l'expression obtenue en 4. À t=1, la formule donnée pour t≥1 fournit la même valeur, 2-2/e : la courbe est donc continue en ce point. Avant t=1, elle est croissante de 0 à cette valeur. Après t=1, le coefficient e-2 est positif et le facteur e^{-t} décroît vers 0 : la courbe décroît vers l'asymptote horizontale s=1.



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe croissante de (0;0) à (1;1,264), puis décroissante vers l'asymptote s=1.

Question 5.c. Donner la limite de la fonction s(t) en +∞.

Pour t≥1, l'énoncé donne $s(t)=1+(e-2)e^{-t}$. Lorsque t tend vers +∞, e^{-t} tend vers 0. Le coefficient e-2 étant constant, le produit $(e-2)e^{-t}$ tend aussi vers 0. La limite de s est donc la valeur constante restante, égale à 1. Cela confirme l'asymptote horizontale de la courbe.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Elle étudie le freinage d'un chariot et la réponse d'un système électrique, mobilisant équations différentielles, intégrales, développements limités et transformées de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y' + ay = 0$, les solutions sont $y(t) = ke^{-at}$; une solution particulière aide à résoudre l'équation avec second membre.
- Si $f(t)$ tend vers une limite finie L quand t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- La distance parcourue sur $[t_0 ; t_1]$ est l'intégrale de la vitesse : $d = \int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- La transformée de Laplace de $f(t - a)U(t - a)$ est $F(p)e^{-ap}$: le facteur exponentiel correspond au retard a.

Points de vigilance & attentes du jury

- Utiliser la condition initiale $f(0) = 20$ pour déterminer la constante de la solution différentielle.
- Pour conclure sur l'arrêt du chariot, interpréter la limite de sa vitesse et pas seulement le fait qu'elle décroît.
- Calculer la distance en évaluant la primitive à t_1 puis à t_0, et arrondir le résultat au centimètre.
- Pour les signaux retardés, appliquer le facteur e^{-ap} et tenir compte de $U(t - a)$ au retour dans le domaine temporel.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment trouver la solution de l'équation différentielle avec second membre constant ?

On résout d'abord l'équation homogène, puis on cherche une solution particulière. Ici, la constante 5 convient. On additionne cette solution aux solutions homogènes et on applique ensuite la condition initiale $f(0) = 20$.

Q : Comment utiliser la limite pour décider si le chariot s'arrête ?

Comme $e^{-0,8t}$ tend vers zéro, $f(t)$ tend vers 5 $m \cdot s^{-1}$ et la courbe admet l'asymptote $y = 5$. La vitesse ne tend donc pas vers zéro : selon le modèle donné, le chariot ne s'arrête pas.

Q : Comment organiser les deux heures de l'épreuve ?

L'épreuve comporte deux exercices de 10 points. Répartissez votre temps entre les deux, gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et pensez à compléter et rendre le document-réponse demandé pour les courbes.

Q : Quels éléments de notation et quels outils le sujet précise-t-il ?

Chaque exercice vaut 10 points, sans détail du barème par question. Le sujet autorise une calculatrice avec mode examen actif ou une calculatrice sans mémoire de type collège. Il ne précise pas d'autre norme de présentation.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2022/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Systèmes Constructifs Bois et Habitat : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.