Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS SCBH

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2 pour toutes les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle, étude de fonction et développement limité (14 questions) **Page 3**

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance (10 questions) **Page 8**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2023/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle, étude de fonction et développement limité

La distance entre le fond d'un tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction du temps, avec une équation différentielle et des conditions initiales. L'exercice étudie ensuite cette fonction, un algorithme de seuil, sa tangente et son développement limité.

Partie A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On calcule le discriminant du trinôme : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$, donc il admet deux racines réelles distinctes. En factorisant, $r^2 + 5r + 4 = (r+1)(r+4)$. L'équation est vérifiée si l'un des facteurs est nul, d'où les deux valeurs recherchées.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0 à l'aide du tableau fourni.

L'équation caractéristique associée à $y'' + 5y' + 4y = 0$ est $r^2 + 5r + 4 = 0$. D'après la question précédente, elle possède deux racines réelles distinctes -1 et -4. Le tableau fourni indique alors que toute solution est une combinaison linéaire des exponentielles associées aux deux racines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la position et de la vitesse du point M à l'instant t = 0, déterminer f(0) et f'(0).

À l'instant initial, la distance entre M et O est de 20 cm. Comme $f(t)$ représente cette distance, sa valeur initiale est directement cette mesure. La vitesse du point dans le sens de rapprochement est indiquée négative et vaut $-10\ \mathrm{cm\backslash cdot p s}^{-1}$: elle correspond à la dérivée de la distance à l'instant initial.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\backslash cdot p s}^{-1}$.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On substitue $t = 2$ dans l'expression de f donnée dans le sujet. Le second terme contient alors l'exposant $-4 \times 2 = -8$. La distance cherchée est donc donnée exactement par la différence des deux termes exponentiels ci-dessous, en centimètres.

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}.$$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$OM = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.**

La question 2.b donne $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, et la partie B établit que cette fonction est décroissante. À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, inférieur au seuil de 0,5 cm. La distance ayant diminué, ce seuil est atteint avant 4 secondes.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Oui : $f(4) \approx 0{,}427$ cm, donc le tiroir est fermé avant 4 secondes.

Partie B. Étude de fonction

Question 1.a. **Sachant que lim e⁻ᵘ = 0 lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction étudiée est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Quand t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, chacun des exponentiels e^{-t} et e^{-4t} tend vers 0. La limite de leur combinaison linéaire est donc 0.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0.$

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.**

On a établi que $f(t)$ tend vers la valeur finie 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Par définition, la courbe représentative de f admet donc une asymptote horizontale en $+\infty$. Son équation est la droite de niveau égal à cette limite, c'est-à-dire l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ en utilisant $(e^{at})' = ae^{at}$. Le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$. Pour le second, le signe moins initial et le facteur -4 de la dérivée se compensent, ce qui donne $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}.$$

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$ sur tout l'intervalle considéré, f y est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et la limite en $+\infty$ vaut 0. Le tableau de variations traduit donc une décroissance de 20 vers 0, sans que 0 soit atteint à une valeur finie de t.

t	**0**	$+\infty$
$f(t)$	20	$\searrow$ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

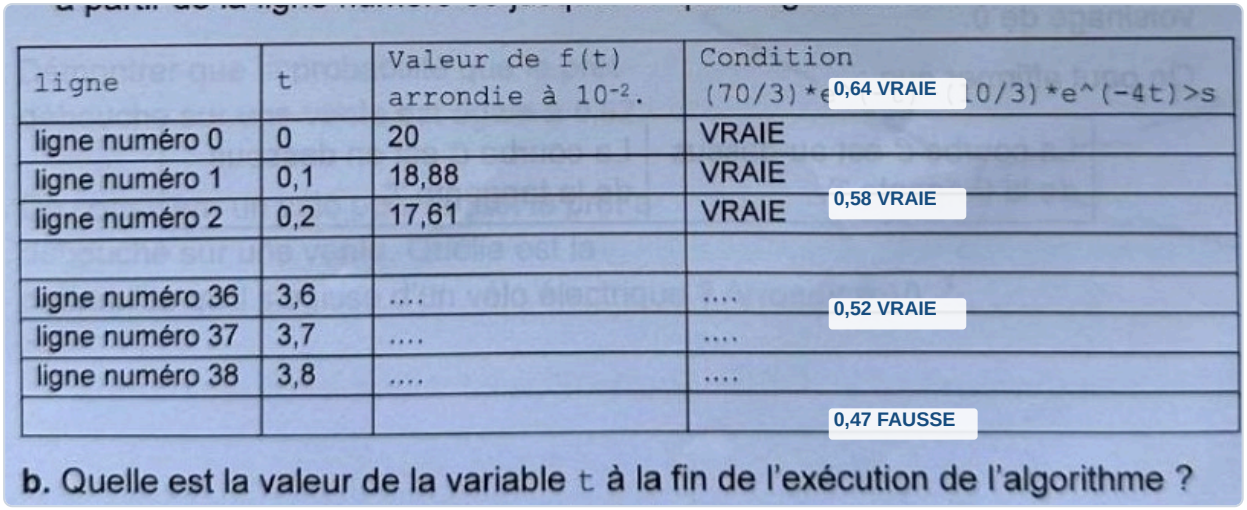
f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire, jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondies au centième et le résultat du test de la condition.

À chaque itération, t augmente de 0,1 et la condition testée est $f(t) > 0{,}5$. On calcule les valeurs de la fonction, arrondies au centième, puis on vérifie si elles dépassent le seuil. Le test est encore vrai à 3,8 s, mais devient faux à 3,9 s : cette dernière ligne est celle où l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de l'algorithme complété



ligne	t	Valeur de f(t) arrondie à 10^{-2}.	Condition (70/3)*e^(-4t)-(10/3)*e^(-4t)>s
ligne numéro 0	0	20	VRAIE
ligne numéro 1	0,1	18,88	VRAIE
ligne numéro 2	0,2	17,61	VRAIE
ligne numéro 36	3,6	....	....
ligne numéro 37	3,7	....	....
ligne numéro 38	3,8	....	....

b. Quelle est la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ligne 39 : $t = 3{,}9$, $f(t) \approx 0{,}47$, condition FAUSSE.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

Le programme poursuit les itérations tant que $f(t) > 0{,}5$. À $t = 3{,}8$, la valeur arrondie est 0,52, donc la condition reste vraie et une itération supplémentaire a lieu. À $t = 3{,}9$, la valeur est 0,47 : la condition devient fausse et l'algorithme s'arrête. La variable conserve alors cette dernière valeur de t.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À l'arrêt, $t = 3{,}9$ s : la distance est inférieure à 0,5 cm et le tiroir est fermé.

Question 4.a. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. À partir de l'expression de f, on obtient $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$ et $f'(0) = -\frac{70}{3} + \frac{40}{3} = -10$. En reportant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on trouve son expression.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. **Parmi les réponses proposées, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de 0. Aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel fourni dans le sujet affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre deux : les termes constant, linéaire et quadratique sont respectivement 20, $-10t$ et $-15t^2$. Parmi les choix proposés, il faut conserver le terme de reste sous la forme indiquée avec une fonction $\epsilon(t)$ qui tend vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\epsilon(t)$, avec $\lim_{t\to 0} \epsilon(t) = 0$.

Question 4.c. **Indiquer si, au voisinage de 0, la courbe de f est au-dessus ou en dessous de sa tangente T. Aucune justification n'est demandée.**

La tangente a pour équation $y = 20 - 10t$. Le développement limité donne, près de 0, $f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\epsilon(t)$, où $\epsilon(t)$ tend vers 0. La différence entre la courbe et sa tangente est donc négative pour $t > 0$ suffisamment proche de 0 : la courbe est en dessous de la tangente sur le domaine étudié.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Au voisinage de 0, la courbe est en dessous de T.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

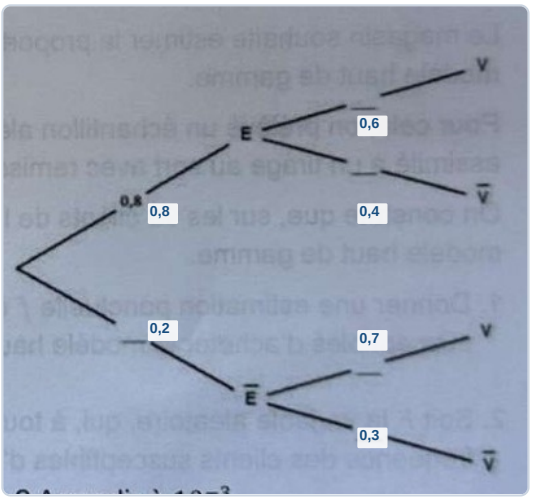
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques et étudie la probabilité que le prêt aboutisse à une vente. L'exercice porte aussi sur les durées de réparation d'un échantillon et sur l'estimation de la proportion de clients intéressés par un modèle haut de gamme.

Partie A. Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté et l'issue du prêt, vente ou absence de vente.

Les premières branches donnent les probabilités des types de vélos : $P(E) = 0{,}8$ et $P(\overline{E}) = 0{,}2$. Sur chaque branche, on reporte ensuite la probabilité conditionnelle de vente donnée par l'énoncé, puis celle de son contraire. Ces deux probabilités complémentaires totalisent 1. L'arbre annoté reprend les six probabilités nécessaires, en conservant la branche E déjà indiquée sur le schéma source.

Arbre pondéré complété



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E) = 0{,}8$, $P(\overline{E}) = 0{,}2$; sous E : $0{,}6$ et $0{,}4$; sous $\overline{E}$: $0{,}7$ et $0{,}3$.

Question 2. Déterminer la probabilité P(E ∩ V) qu'un vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente.

Pour obtenir l'événement $E \cap V$, le vélo doit d'abord être électrique, puis le prêt doit conduire à une vente. On multiplie donc la probabilité de la première branche par la probabilité conditionnelle de vente sur cette branche : $P(E \cap V) = P(E) \times P_E(V) = 0{,}8 \times 0{,}6 = 0{,}48$. La probabilité cherchée est ainsi de 48 %.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$P(E \cap V) = 0{,}48$.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Une vente peut suivre soit le prêt d'un vélo électrique, soit celui d'un vélo mécanique. Ces deux situations sont incompatibles et couvrent tous les cas où il y a vente. La probabilité de vente est donc la somme des probabilités des deux chemins correspondants dans l'arbre :
$P(V) = 0{,}8 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}7 = 0{,}48 + 0{,}14 = 0{,}62$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(V) = 0{,}62$.

Question 4. **Sachant qu'un prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité que le vélo soit électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

On cherche la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que le prêt a abouti à une vente. La probabilité conditionnelle se calcule en divisant la probabilité d'un vélo électrique avec vente par la probabilité d'une vente : $P_V(E) = \dfrac{P(E \cap V)}{P(V)} = \dfrac{0{,}48}{0{,}62} \approx 0{,}7741935$. On arrondit au millième comme demandé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P_V(E) \approx 0{,}774$.

Partie B. Loi binomiale

Question 1. **La variable aléatoire X compte, parmi 80 vélos réparés, ceux dont la réparation a nécessité moins d'une heure. Sachant qu'elle suit une loi binomiale, donner ses paramètres.**

Chaque vélo réparé constitue une épreuve, avec deux issues pour le décompte : réparation de moins d'une heure ou non. La probabilité de succès, « moins d'une heure », est identique pour chaque vélo et vaut $0{,}62$. L'échantillon compte 80 vélos ; la variable qui dénombre les succès suit donc une loi binomiale de paramètres 80 et $0{,}62$.

Paramètre	Valeur
Nombre d'épreuves	$n = 80$
Probabilité de succès	$p = 0{,}62$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $X \sim \mathcal{B}(80\,;\,0{,}62)$.

Question 2. Déterminer P(X = 40) et arrondir le résultat à 10^{-3}.

Pour une loi binomiale de paramètres 80 et $0{,}62$, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure est :
$P(X = 40) = \binom{80}{40}(0{,}62)^{40}(0{,}38)^{40} \approx 0{,}00829$. La probabilité complémentaire d'une réparation d'au moins une heure vaut $0{,}38$. L'arrondi au millième donne le résultat ci-dessous.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(X = 40) \approx 0{,}008$.

Question 3. Déterminer la probabilité que le nombre de vélos nécessitant moins d'une heure de main-d'œuvre soit strictement supérieur au nombre de vélos nécessitant plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.

Parmi les 80 vélos, X nécessitent moins d'une heure et $80 - X$ nécessitent plus d'une heure, selon les deux catégories considérées dans l'exercice. La condition demandée est donc $X > 80 - X$, soit $X > 40$. Comme X est entier, on cherche $P(X \geq 41)$ pour la loi binomiale de paramètres 80 et $0{,}62$. Le calcul donne environ $0{,}9809$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est $P(X \geq 41) \approx 0{,}981$.

Partie C. Intervalle de confiance

Question 1. Parmi les 90 clients de l'échantillon, 54 sont susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme. Donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de ces clients.

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. On divise le nombre de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme par l'effectif total :
$f = \dfrac{54}{90} = 0{,}6$. Cette fréquence correspond à 60 % des clients de l'échantillon et sert d'estimation de la proportion recherchée.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f = 0{,}6$, soit 60 %.

Question 2.a. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p.

La formule fournie utilise la fréquence observée $f = 0{,}6$ et l'effectif $n = 90$. La marge d'erreur vaut $1{,}96\sqrt{\dfrac{0{,}6(1-0{,}6)}{90}} \approx 0{,}1012$. Les bornes sont donc $0{,}6 - 0{,}1012 \approx 0{,}4988$ et $0{,}6 + 0{,}1012 \approx 0{,}7012$.

Borne	Valeur
Inférieure	$0{,}4988$
Supérieure	$0{,}7012$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}499\,;\,0{,}701]$.

Question 2.b. Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à cet intervalle de confiance.

Un niveau de confiance de 95 % décrit la fiabilité de la méthode si l'on répétait le prélèvement et la construction de l'intervalle. Il ne signifie pas que la proportion inconnue est certaine d'appartenir à cet intervalle particulier. On ne peut donc pas affirmer avec certitude que p appartient à l'intervalle calculé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non, on ne peut pas en être certain.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, dure deux heures et vaut coefficient 2, sauf en Traitement des matériaux où le coefficient est 3. Deux exercices étudient la fermeture d'un tiroir et un magasin de vélos. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, analyse de fonction, algorithmes, probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique associée est $r^2 + 5r + 4 = 0$.
- La distance du tiroir est modélisée par $f(t) = (70/3)e^{-t} - (10/3)e^{-4t}$.
- Si X suit une loi binomiale de paramètres n et p, alors $P(X = k) = C(n,k)p^k(1-p)^{n-k}$.
- L'intervalle fourni à 95 % est $[f - 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)} ; f + 1{,}96\sqrt{(f(1-f)/n)}]$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la position initiale f(0) de la vitesse initiale f'(0), exprimée en $cm \cdot s^{-1}$.
- Dans l'algorithme, mettre à jour t par pas de 0,1 puis tester la condition à chaque étape.
- Dans l'arbre pondéré, placer les probabilités conditionnelles sur les branches et multiplier celles d'un même chemin.
- Traduire avec soin la comparaison stricte des nombres de réparations, sans confondre moins d'une heure et plus d'une heure.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle de l'exercice sur le tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent les exponentielles de la solution générale. Les conditions initiales déterminent ensuite les constantes et permettent d'obtenir la fonction de distance.

Q : Comment choisir les paramètres de la loi binomiale pour les réparations ?

Le nombre d'essais est l'effectif de l'échantillon, soit 80 vélos. La probabilité de succès est celle qu'une réparation nécessite moins d'une heure, soit 0,62. On modélise donc X par une loi binomiale de paramètres 80 et 0,62.

Q : Quelle est la durée de l'épreuve et comment les points sont-ils répartis ?

L'épreuve dure deux heures. Les deux exercices valent chacun 10 points, soit 20 points au total. Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées, sauf Traitement des matériaux, pour lequel il est de 3.

Q : Un intervalle de confiance à 95 % garantit-il que la proportion s'y trouve ?

Non. L'intervalle est calculé à partir de l'échantillon et ne garantit pas avec certitude que la proportion inconnue lui appartient. Le niveau de 95 % caractérise la fiabilité de la méthode sur des échantillonnages répétés.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2023/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf
Ressources BTS Systèmes Constructifs Bois et Habitat : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.