Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS SCBH

Mathématiques

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Développement en série de Fourier d'une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2023/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d'un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d'un tiroir et le fond du meuble est modélisée en fonction du temps, avec une distance et une vitesse initiales données. L'exercice étudie l'équation différentielle du modèle, puis les variations, le temps de fermeture et la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l'équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

On factorise le trinôme : $r^2 + 5r + 4 = (r + 1)(r + 4)$. L'équation est vérifiée si l'un des facteurs est nul.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. Résoudre l'équation différentielle (E₀) : y'' + 5y' + 4y = 0, à l'aide du tableau fourni.

L'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. Le tableau fourni donne alors les solutions comme combinaisons linéaires des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2.a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déduire les valeurs de f(0) et de f'(0).

À l'instant initial, la distance OM est de 20 cm, donc $f(0) = 20$. La dérivée représente la vitesse de rapprochement : celle-ci est donnée comme négative et vaut $-10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10\ \mathrm{cm\cdot s^{-1}}$.

Question 2.b. En utilisant l'expression donnée de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

Dans $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$, on remplace t par 2. La distance obtenue est en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8} \approx 3{,}157$ cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Vérifier, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.**

À $t = 3{,}9$ s, $f(3{,}9) \approx 0{,}472$ cm, donc la distance est inférieure au seuil de 0,5 cm. Le tiroir est ainsi fermé avant 4 secondes, conformément à l'affirmation du constructeur.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le tiroir est fermé à 3,9 s, donc en moins de 4 s.

Partie B

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e^{-u}, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand t tend vers $+\infty$, e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers 0. Leur combinaison linéaire $f(t)$ tend donc vers 0.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative C de f possède une asymptote, et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et égale à 0. La courbe admet donc une asymptote horizontale confondue avec l'axe des abscisses.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque exponentielle avec $(e^{u(t)})' = u'(t)e^{u(t)}$. Ainsi, les dérivées des deux termes sont respectivement $-\frac{70}{3}e^{-t}$ et $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

Puisque $f'(t) < 0$, la fonction est strictement décroissante. Elle commence en $f(0) = 20$ et tend vers 0 à l'infini.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variations de f	20	$\searrow$ 0

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 0 sur $[0;+\infty[$.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire jusqu'à son arrêt. Indiquer les valeurs de t, de f(t) arrondies au centième, et le résultat de la condition testée à chaque ligne.

À chaque itération, t augmente de 0,1. La condition testée est équivalente à $f(t) > 0{,}5$.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'algorithme s'arrête à la ligne 39, pour $t = 3{,}9$ s.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

1. À $t = 3{,}8$, $f(t) \approx 0{,}52 > 0{,}5$: la boucle continue.
2. À $t = 3{,}9$, $f(t) \approx 0{,}47 < 0{,}5$: la boucle s'arrête.

La distance est alors sous le seuil de fermeture.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé selon le seuil fixé.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = 1/4 ∫₀⁴ f(t) dt. Démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Une primitive de f est $F(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. Ainsi, $m = \frac{1}{4}\big(F(4) - F(0)\big)$. Le calcul aux bornes donne l'expression demandée.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5{,}518 \text{ cm}.$$

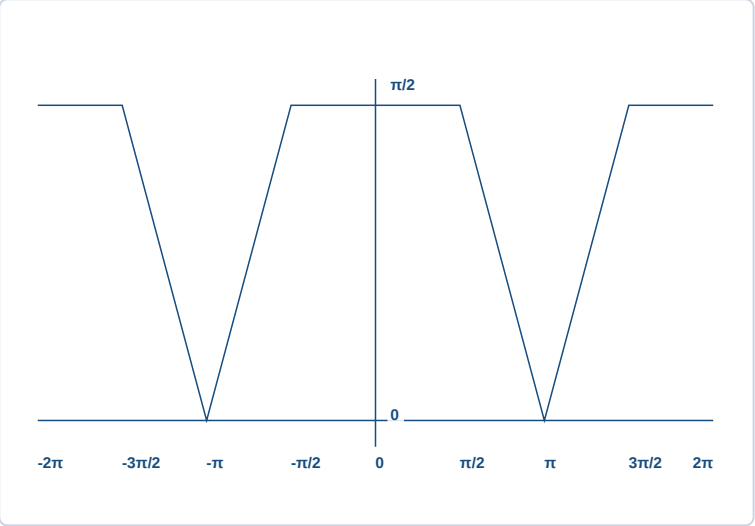
2. Développement en série de Fourier d'une fonction périodique paire

On étudie une fonction paire de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π]. L'exercice mobilise le formulaire de Fourier pour tracer la fonction, calculer ses coefficients et sa somme partielle d'ordre 3, puis évaluer une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l'intervalle [-2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux, de sa parité et de sa périodicité.

Sur \,$[-2\pi, 2\pi]$, les plateaux de hauteur $\pi/2$ sont centrés en -2π, 0 et 2π. La fonction décroît jusqu'à 0 en $-\pi$ et π , et croît depuis ces points. Elle est paire et de période 2π.

Courbe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe périodique paire, avec des zéros en $-\pi$ et π, et des plateaux de hauteur $\pi/2$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient b_n est nul.

Sur une période centrée en 0, f est paire et $\sin(nt)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur $[-\pi, \pi]$ est nulle :

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = 0.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.

La période est $T = 2\pi$. La pulsation vaut donc $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\omega = 1$ rad.

Question 4. Démontrer que le coefficient a_0 est égal à $3\pi/8$.

La fonction étant paire, $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. En intégrant sur les deux intervalles de définition :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\times\frac{\pi}{2} + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\,dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right) = \frac{3\pi}{8}.$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 = \dfrac{3\pi}{8}$.

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $a_n = \int_0^{\pi/2} \cos(nt)\,dt + (2/\pi)\int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Le formulaire donne, puisque f est paire, $a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. Or $f(t) = \pi/2$ sur $[0, \pi/2[$, puis $f(t) = \pi - t$ sur $[\pi/2, \pi]$. Ainsi :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt\right),$$

ce qui est l'expression demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt.$

Question 6. À partir de l'expression de a_n fournie dans le sujet, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.

On utilise la formule fournie $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$. Pour $n = 1, 2, 3$, les différences entre cosinus valent respectivement $1, -2, 1$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_1 = \dfrac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\dfrac{1}{\pi}, \quad a_3 = \dfrac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire l'expression de la somme partielle $s_3(t)$ à partir des coefficients obtenus.

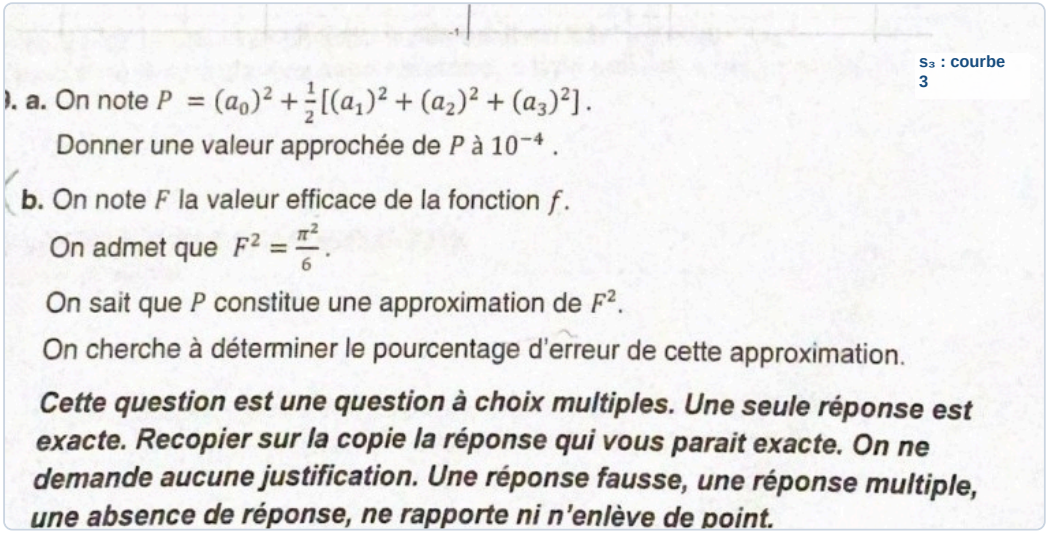
Comme tous les coefficients b_n sont nuls, la somme partielle d'ordre 3 s'écrit $s_3(t) = a_0 + a_1\cos(t) + a_2\cos(2t) + a_3\cos(3t)$. On y remplace chaque coefficient par sa valeur exacte.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées représente la fonction s_3.

La somme partielle est paire, périodique, maximale près de 0 et présente ses minima près de $-\pi$ et π. Parmi les trois tracés, ces caractéristiques correspondent à la courbe numéro 3.

Courbe correspondant à s_3



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Courbe numéro 3.

Question 9.a. Pour P = $(a_0)^2$ + 1/2[$(a_1)^2$ + $(a_2)^2$ + $(a_3)^2$], donner une valeur approchée de P à 10^{-4}.

En remplaçant les coefficients par leurs valeurs exactes :

$$P = \left(\frac{3\pi}{8}\right)^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + \left(-\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2}{9\pi}\right)^2\right] = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$ à 10^{-4} près.

Question 9.b. **La valeur efficace F vérifie F² = π²/6 et P constitue une approximation de F². Déterminer le pourcentage d'erreur en choisissant une seule réponse parmi 0,1 %, 1 % et 10 %. Aucune justification n'est demandée.**

L'erreur relative par rapport à $F^2 = \pi^2/6$ est d'environ $0{,}074\,\%$. Parmi les choix proposés, la valeur la plus proche est $0{,}1\,\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> 0,1 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, code 23MATGRB2, dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Les coefficients sont 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Elle modélise la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et étudie une fonction périodique paire avec les séries de Fourier, en mobilisant calcul, analyse, algorithmique et interprétation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour une équation différentielle linéaire à coefficients constants, les solutions se déduisent des racines de son équation caractéristique.
- Si f'(t) < 0 sur un intervalle, la fonction f y est strictement décroissante.
- Pour une fonction périodique paire, les coefficients b_n sont nuls et les coefficients a_n se calculent sur une demi-période.
- La pulsation fondamentale d'une fonction de période T est $\omega = 2\pi/T$.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance f(0) de la vitesse f'(0), et conserver les unités en centimètres et en secondes.
- Pour vérifier le temps de fermeture, appliquer le seuil strict OM < 0,5 cm et interpréter l'arrêt de l'algorithme.
- En séries de Fourier, respecter les conventions du formulaire pour a_0, a_n, b_n et la somme partielle.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2 et sélectionner une seule réponse au QCM.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment exploiter les conditions initiales dans l'équation différentielle du tiroir ?

La distance initiale donne la valeur de la fonction en t = 0, tandis que la vitesse initiale donne celle de sa dérivée. Ces deux conditions déterminent les constantes de la solution générale de l'équation différentielle.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans cet exercice de Fourier ?

La fonction f est paire et la fonction sinus est impaire. Leur produit est impair sur un intervalle symétrique, donc son intégrale est nulle. Le formulaire permet aussi d'appliquer directement les formules adaptées aux fonctions paires.

Q : Comment suivre l'algorithme et déterminer quand il s'arrête ?

On augmente t de 0,1 tant que f(t) est supérieure à 0,5. Il faut calculer f(t) à chaque étape, évaluer la condition dans l'ordre et relever la première valeur de t pour laquelle cette condition devient fausse.

Q : Quelles précautions prendre pour calculer les coefficients et la somme partielle de Fourier ?

Utilisez la période et la pulsation correspondant à la fonction, puis appliquez les formules du formulaire en tenant compte de sa parité. Conservez les valeurs exactes des coefficients avant de calculer la somme partielle ou les approximations demandées.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsscbh.fr/assets/annales/bts-scbh/E2 - Mathématiques/2023/BTS SCBH - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Systèmes Constructifs Bois et Habitat : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.